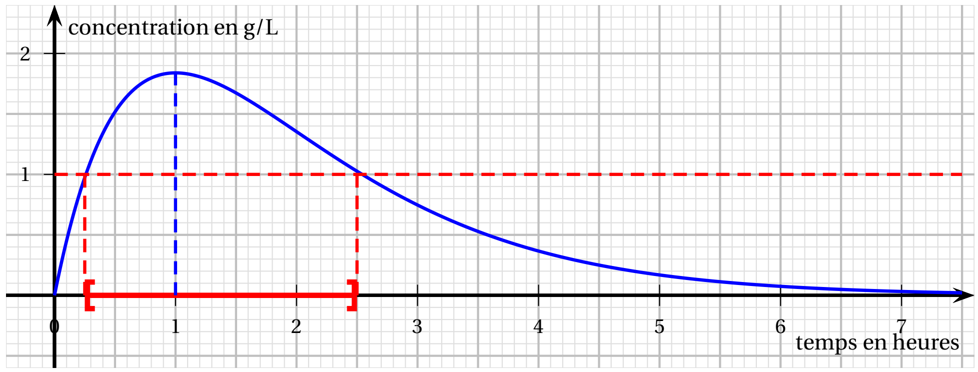
Exercice 3 — 6 points

On se propose d'étudier la concentration dans le sang d'un médicament ingéré par une personne pour la première fois. Soit t le temps (en heures) écoulé depuis l'ingestion de ce médicament. On admet que la concentration de ce médicament dans le sang, en gramme par litre de sang, est modélisée par une fonction f de la variable t définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.

Partie A : lectures graphiques



On a représenté ci-dessus la courbe représentative de la fonction f.

Avec la précision permise par le graphique, on donne sans justification :

1. Le temps écoulé depuis l'instant de l'ingestion de ce médicament et l'instant où la concentration de médicament dans le sang est maximale selon ce modèle : 1 heure.
2. L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(t) \geqslant 1$: l'intervalle $[0{,}25\,;\,2{,}5]$.
3. La convexité de la fonction f sur l' intervalle $[0\,;\,8]$: la fonction semble concave entre 0 et 2, puis convexe.

Partie B : détermination de la fonction f

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + y = 5\,\mathrm{e}^{-t}$,

d'inconnue y, où y est une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

On admet que la fonction f est une solution de l'équation différentielle (E).

1. On résout l'équation différentielle (E') : $y' + y = 0$.

   D'après le cours, on sait que les équations différentielles de la forme $ay' + by = 0$ ont des solutions y s'écrivant $y(t) = k\,\mathrm{e}^{-\frac{b}{a}t}$ où k est un réel quelconque.

   Donc l'équation (E') a pour solutions les fonctions y s'écrivant $y(t) = k\,\mathrm{e}^{-t}$ où $k \in \mathbf{R}$.
2. Soit u la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par $u(t) = at\,\mathrm{e}^{-t}$ avec $a \in \mathbf{R}$.

   La fonction u est solution de l'équation différentielle (E) si et seulement si $u'(t)+u(t) = 5\,\mathrm{e}^{-t}$.

   $u(t) = at\,\mathrm{e}^{-t}$ donc $u'(t) = a \times \mathrm{e}^{-t} + at \times (-1)\,\mathrm{e}^{-t} = a\,\mathrm{e}^{-t} - at\,\mathrm{e}^{-t}$

   $u'(t)+u(t) = 5\,\mathrm{e}^{-t} \iff a\,\mathrm{e}^{-t} - at\,\mathrm{e}^{-t} + at\,\mathrm{e}^{-t} = 5\,\mathrm{e}^{-t} \iff a\,\mathrm{e}^{-t} = 5\,\mathrm{e}^{-t} \iff a = 5$ car $\mathrm{e}^{-t} \neq 0$ pour tout t.

   Donc la fonction u définie par $u(t) = 5t\,\mathrm{e}^{-t}$ est une solution de (E).
3. La solution générale de l'équation (E) est la somme d'une solution particulière de (E) et de la solution générale de l'équation sans second membre (E') : ce sont donc les fonctions f définies par $f(t) = k\,\mathrm{e}^{-t} + 5t\,\mathrm{e}^{-t}$ où $k \in \mathbf{R}$.
4. La personne n'ayant pas pris ce médicament auparavant, on admet que $f(0) = 0$.

   $f(0) = 0 \iff k\,\mathrm{e}^{0} + 5 \times 0 \times \mathrm{e}^{0} = 0 \iff = 0$

   L'expression de la fonction f est $f(t) = 5t\,\mathrm{e}^{-t}$.

Partie C : étude de la fonction f

Dans cette partie, on admet que f est définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par $f(t) = 5t\,\mathrm{e}^{-t}$.

1. On sait que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^t}{t} = +\infty$ donc $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{t}{\mathrm{e}^t} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} 5t\,\mathrm{e}^{-t} = 0$, et donc $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$
   Cela signifie que la concentration en médicament devient nulle quand le temps augmente indéfiniment.
2. f est le produit de fonctions dérivables sur **R** donc f est dérivable sur $[0~;~+\infty[$.

   $f(t) = 5t\,\mathrm{e}^{-t}$ donc $f'(t) = 5\times\,\mathrm{e}^{-t} + 5t\times(-1)\,\mathrm{e}^{-t} = (5-5t)\,\mathrm{e}^{-t}$

   On étudie le signe de $f'(t)$ sur $[0~;~+\infty[$.

t	0		1		$+\infty$
$5-5t$		$+$	0	$-$	
e^{-t}		$+$		$+$	
$f'(t)$		$+$	0	$-$	

   $f(0) = 0$ et $f(1) = 5\times1\times\,\mathrm{e}^{-1} = 5\,\mathrm{e}^{-1}$

   On établit le tableau de variation complet de f sur $[0~;~+\infty[$.

t	0		1		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$5\,\mathrm{e}^{-1}$	$\searrow$	0

3. On veut montrer qu'il existe deux réels t_1 et t_2 tels que $f(t_1) = f(t_2) = 1$.

   Le maximum de la fonction f est $f(1) = 5\,\mathrm{e}^{-1} \approx 1{,}84 > 1$.

   On complète le tableau de variation de f.

t	0		t_1		1		t_2		$+\infty$
f	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$5\,\mathrm{e}^{-1}$	$\searrow$	1	$\searrow$	0

   - Sur l'intervalle $]0~;~1[$, la fonction f est continue et strictement croissante. De plus $1 \in \left]f(0)~;~f(1)\right[$. Donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(t) = 1$ admet une solution unique dans $]0~;~1[$. On l'appelle t_1.

     D'après la calculatrice : $f(0{,}25) \approx 0{,}97 < 1$ et $f(0{,}26) \approx 1{,}002 > 1$ donc $0{,}25$ est une valeur approchée de t_1 à 10^{-2}.

- Sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$, la fonction f est continue et strictement décroissante. De plus $1 \in \left]\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)\,;\, f(1)\right[$. Donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(t) = 1$ admet une solution unique dans $]1\,;\,+\infty[$. On l'appelle t_2.

  D'après la calculatrice : $f(2{,}54) \approx 1{,}002 > 1$ et $f(2{,}55) \approx 0{,}996 < 1$ donc $2{,}54$ est une valeur approchée de t_2 à 10^{-2}.

4. Pour une concentration du médicament supérieure ou égale à 1 gramme par litre de sang, il y a un risque de somnolence. C'est donc quand $f(t) \geqslant 1$.

$f(t) \geqslant 1$ pour $t \in [t_1\,;\,t_2]$, soit pour une durée égale à $t_2 - t_1$ qui vaut environ $2{,}54 - 0{,}25$ soit $2{,}29$ heures ; cela fait environ 2 heures et 17 minutes.

Partie D : concentration moyenne

La concentration moyenne du médicament (en gramme par litre de sang) durant la première heure est donnée par : $T_m = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ où f est définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(t) = 5t\,\mathrm{e}^{-t}$.

On utilise une intégration par parties : $\displaystyle\int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t = \big[u(t)v(t)\big]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t$.

On pose $\left\{\begin{array}{l} u(t) = 5t \\ v'(t) = \mathrm{e}^{-t}\end{array}\right.$ donc $\left\{\begin{array}{l} u'(t) = 5 \\ v(t) = -\mathrm{e}^{-t}\end{array}\right.$

$$T_m = \int_0^1 5t\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \left[5t \times \left(-\mathrm{e}^{-t}\right)\right]_0^1 - \int_0^1 5 \times \left(-\mathrm{e}^{-t}\right)\,\mathrm{d}t = \left[-5t\,\mathrm{e}^{-t}\right]_0^1 - 5\left[\mathrm{e}^{-t}\right]_0^1$$
$$= \left(-5\,\mathrm{e}^{-1} - 0\right) - \left(-5\,\mathrm{e}^{-1} + 5\,\mathrm{e}^{0}\right) = 5 - 10\,\mathrm{e}^{-1} \approx 1{,}32$$